**Domácí úkol ze cvičení 11** – jako příprava na příští cvičení (dobrovolně můžete i přinést ke kontrole, co jste řešili):

**Derivace složené funkce více proměnných:**
„Technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového“ pravidla - jaké to jsou předpoklady?
Pokuste se aspoň jeden příklad „sepsat“ a zjistit, co „nejde“- případné nejasnosti probereme na cvičení.

1. Určete $g'(x)$ a $g''(x)$ , je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.
2. Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce $g$ , je-li

   (i) $g(x,y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y) = f(x^2 + y^2, xy, \frac{y}{x})$ ; (iii) $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$ .
3. Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y) = F(x, y, \varphi(x,y))$.

**Extrémy (jednoduché)** :
Zopakujte si, prosím, co „víte z přednášky o lokálních a globálních extrémech funkcí více proměnných a zkuste promyslet některý z příkladů:

1. Vyšetřete v $R^2$ globální i lokální extrémy následujících funkcí:
   a) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ ;
   b) $f(x,y) = 12xy - x^2 y - xy^2$ ;
   c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;
   d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině $M$ , je-li:
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$, $M = \{(x,y);\ x^2 \le y \le 4\}$
   b) $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ , $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$

**Implicitní funkce:**
Zkuste, zda byste vyřešili některý z následujících příkladů (viz věta o implicitní funkci z přednášky) a připravte si, prosím, případné dotazy :

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y) = 0$ je v okolí bodu $(x_0, y_0)$ definována implicitně funkce $y = f(x)$ .
   Pak a) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$;
   b) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0$ pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když:
      i) $F(x,y) = x^2 - y^3 + x^2 y - 1$, $(x_0, y_0) = (1,0)$
      ii) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3$, $(x_0, y_0) = (1,2)$
      iii) $F(x,y) = xy - e^x + e^y$, $(x_0, y_0) = (0,0)$ .

2. a) Dokažte, že rovnicí $2x^2 + 2y^2 + z^3 + 8xz - z + 8 = 0$
   je definována implicitně v okolí bodu $(-2,0,1)$ funkce $z = f(x,y)$, $f \in C^2(U(-2,0))$ .
   b) Ukažte, že bod $(-2,0)$ stacionárním bodem funkce $f(x,y)$.
   c) Nabývá funkce $z = f(x,y)$ v bodě $(-2,0)$ lokální extrém?

3. a) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0)$ a nechť platí $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z) = 0$ v bodě $(x_0, y_0, z_0)$ za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce $F$ je v bodě $(x_0, y_0, z_0)$ nenulová.
   b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí
   $$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0 \ .$$